2A

УДК 004.047

А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница
Донецкий национальный технический университет, Украина
anoprien@cs.dgtu.donetsk.ua, ivanitsa-serg@rambler.ru

Особенности реализации постбинарных логических операций

В статье рассмотрено представление постбинарного логического пространства с помощью аксиоматического аппарата теории множеств. Предложен способ построения постбинарных логических операций, в котором в качестве операндов выступают множества, включающие в себя различные сочетания высказываний тетралогики. Выявлен парадокс представления множественности и предложен альтернативный подход, предполагающий раздвоение множественности, как в ее понятийном представлении, так и в представлении ее как состояния, доминирующего над неопределенностью.

Введение

Так как логика служит одним из инструментов почти любой науки, то с появлением и широким распространением вычислительной техники логика оказала значительное влияние на развитие искусственного (а позже и вычислительного) интеллекта.

Классическая булева логика [1] основана всего на двух логических состояниях: истина (логическая единица) и ложь (логический нуль). Такая логика из-за простоты реализации получила широкое распространение в вычислительной технике и получила более точное название: двоичная (двузначная) логика. Считается, что двоичная логика в достаточной степени способна выполнять основную функцию классической логики: исследование того, как из одних утверждений можно выводить другие. Но реальное мышление не сводится к манипуляциям только двумя логическими значениями, поскольку часто приходится иметь дело с противоречивой информацией, например, поступившей от нескольких независимых источников. Использующий двузначную логику компьютер не является достаточно совершенным мыслящим устройством, которое, столкнувшись с противоречием, было бы способно сделать нечто большее, чем просто зафиксировать его существование. В частности, Н. Белнап в 1976 году высказал предположение, что совершенное устройство должно обладать некоторой стратегией, с тем чтобы, обнаружив противоречивость определенных представлений, иметь возможность отказаться от них [2].

Несмотря на постоянное увеличение вычислительной мощности современных компьютерных систем существующие логические основы их работы не позволяют в должной степени приблизить искусственный интеллект к человеческому, что делает практически недостижимым одно из требований к искусственному интеллекту: *выполнение функций (в частности, творческих), которые традиционно считаются прерогативой человека* [3]. Поэтому современное состояние «логического аппарата» компьютерных технологий представляет собой рубеж, преодоление которого положит начало созданию компьютерной техники нового поколения, в качестве обобщающего названия для которой целесообразным представляется использование термина «постбинарный компьютинг» [4-6].

Двоичная логика и основанные на ней системы счисления представляют собой логическую систему, которая по своей сути является одномерной, поскольку строится в пределах оси, соединяющей логические «0» и «1». Такая одномерная логическая система не единственна и не достаточна, однако она является одним из наиболее значимых элементов современного интеллектуального инструментария. Другими важными составляющими являются как некоторые более ранние формы мышления и представления количественной информации, так и множество перспективных, существующих пока в не полностью оформившемся виде, но все же обладающих значительным информационным потенциалом. К одной из таких перспективных составляющих можно отнести двумерное логическое пространство, которое может быть порождено базисом, состоящей из ортонормированной системы векторов «истина» и «ложь» с положительными и отрицательными осями. Такое логическое пространство порождает множество логических значений, которые могут задаваться либо соответствующими координатами, либо фиксацией характерных точек. Таким образом, введение новых логических значений позволяет значительно расширить возможности формализованной логической оценки разнообразных реальных процессов и ситуаций, что является существенным шагом к «очеловечиванию» машинной логики.

В зависимости от количества используемых логических значений в двумерном логическом пространстве возможно построение ряда различных логических систем. В частности, к таким системам можно отнести монологику (*1*)[1], дилогику (*2*), трилогику (*3*), тетралогику (*4*), пенталогику (*5*) и т.п.

На базе полученных логических систем могут быть простроены и введены в рассмотрение системы кодирования количественной информации, которые задаются так же, как и соответствующие им логические системы. Такими системами кодирования могут быть монокоды, дикоды, трикоды, тетракоды, пентакоды и т.п.

В работе [7] было предложено логики третьего и более высоких порядков объединить одним термином «гиперлогика», а все соответствующие этим логикам системы кодирования – термином «гиперкоды». Совокупность понятий гиперлогики и гиперкодов образуют более обобщенное понятие: «расширенный кодо-логический базис».

Целью данной работы является рассмотрение основных особенностей реализации постбинарных логических операций, использующих четыре логических значения (состояния). При этом в качестве наиболее перспективного варианта рассматривается тетралогика, включающая в себя наряду с классическими «истиной» и «ложью», значения «неопределенности» и «множественности». Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего развития так называемой «алгебры тетралогики», которую можно рассматривать как важный этап развития постбинарной логики будущего.

Представление элементов тетралогики с помощью аксиоматического аппарата теории множеств

Современная теория множеств строится на системе аксиом Цермело-Френкеля (ZF – Zermelo-Fraenkel), из которых выводятся все теоремы и утверждения теории множеств. К системе аксиом ZF часто добавляют аксиому выбора, и называют системой Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC – Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of Choice) [8, с. 157-166].

[1] В скобках указано количество используемых логических значений в каждой приведенной логической системе.

В контексте тетралогики система ZFC также представляет интерес, поскольку всякое логическое пространство может быть «переведено» на язык теории множеств таким образом, что полученные теоремы станут теоремами о множествах, доказуемыми из аксиом ZFC, поскольку любой объект можно считать множеством, и, соответственно, появляется возможность переформулировать какое-либо утверждение, не нарушив его первоначальную истинность.

Таким образом, тетракодовое логическое (или тетралогическое) пространство можно представить совокупностью четырех непустых множеств: Q, J – содержащих по одному фиксированному логическому элементу («истина», «ложь»); A, M – содержащих в конечном представлении по два элемента, представляющих собой результат логической операции над элементами множеств Q, J («истина» или «ложь», «истина» и «ложь»):

$$\forall q\,\exists Q(q \subseteq Q \rightarrow q = 0); \tag{1}$$

$$\forall j\,\exists J(j \subseteq J \rightarrow j = 1); \tag{2}$$

$$\forall a\,\exists A(a \subset A \rightarrow a \in Q \vee a \in J); \tag{3}$$

$$\forall m\,\exists M(m \subset M \rightarrow m \in Q \wedge m \in J). \tag{4}$$

Из записей (1) и (2) очевидно, что множества Q и J представляют собой множества фиксированных значений $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно ($q \in Q \rightarrow q$ – const 0; $j \in J \rightarrow j$ – const 1). Запись (3) показывает, что множество A определимо как сумма (объединение) множеств Q и J ($a \in (Q \cup J)$) и словесно может быть описано так: «*или 0 или 1*». Запись (4) показывает, что множество M определимо как произведение (пересечение) множеств Q и J ($m \in (Q \cap J)$) и словесно может быть описано так: «*и 0 и 1*».

Однако для полного представления гиперлогического пространства необходимо ввести еще одно множество-универсум U, представляющее собой пространство, содержащее все четыре ранее объявленных множества. Таким образом,

$$\forall q\,\forall j\,\forall a\,\forall m\,\exists U = \{u : u \in q \vee u \in j \vee u \in a \vee u \in m\}. \tag{5}$$

Из записи (5) следует, что множество U представляет собой один из элементов тетракода, имеющего возможность каждый элемент множества $\{Q, J, A, M\}$ при определенных обстоятельствах представлять в виде логического «0» или «1».

На основании принятых записей (1 – 4) можно определить понятия каждого элемента тетралогики:

$Q = \{0\}$ – множество «ложь», представляющее значение «ложь» (логический 0) классической логики;

$J = \{1\}$ – множество «истина», представляющее значение «истина» (логическая 1) классической логики;

A – множество абсолютной неопределенности, «непроявленности» (на данный момент, т.е. на момент фиксации логического состояния (высказывания), неизвестно, или «истина» или «ложь»), которая может быть выражена объединением множеств «истина» и «ложь»;

M – множественность, многозначность (и «истина», и «ложь» одновременно, т.е. невозможна однозначная фиксация высказывания), которая может быть выражена пересечением множеств «истина» и «ложь».

В графическом представлении тетралогического пространства (рис. 1) можно выделить следующее утверждение: если *U* – прямоугольник *PKLN* и *Q* – прямоугольник *PKCE*, то *J* – прямоугольник *ECLN*, *A* – прямоугольник *BKLD* и *M* – прямоугольник *PBDN*.

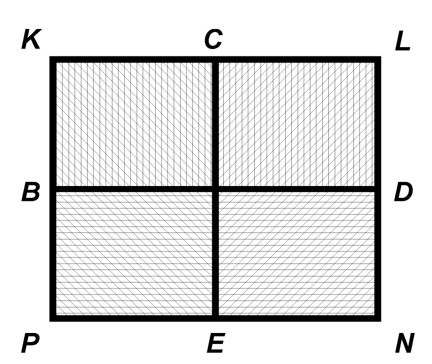


Рисунок 1 – Графическое представление пространства тетралогики

Иногда удобно опускать буквенное обозначение множеств *Q* и *J*, заменяя их, в силу определений (1) и (2), их числовыми эквивалентами 0 и 1 соответственно. В этом случае множество *U* можно представить в виде множества элементов $\{0, 1, A, M\}$.

На заключительном этапе представления элементов тетралогики с учетом их определений (1 – 5) и графического представления (рис. 1) можно выделить следующие закономерности:

$0 = Q$ (в частности, $q \in \{0\}$);

$1 = J$ (в частности, $j \in \{1\}$);

$(A \cap M) \subset (A \cup M) \subset U$ – для множеств *A* и *M* на универсуме *U* определены операции объединения и пересечения;

$a \in (Q \cup J)$, $q \subset A$, $j \subset A$, $(Q \cup J) \neq \varnothing \Rightarrow a \notin \varnothing \vee a \in \{0, 1\}$ – формирование множества неоднозначности *A*;

$m \in (Q \cap J)$, $q \subset M$, $j \subset M$, $(Q \cap J) \neq \varnothing \Rightarrow m \notin \varnothing \vee m \in \{0\} \wedge m \in \{1\}$ – выделение противоречия при формировании множественности *M*: *множество M не может быть пустым, однако для множеств Q и J не определена операция пересечения*.

Возникшее противоречие в данном представлении является достаточно актуальным, так как позволяет объяснить ряд существующих спорных моментов: во-первых, данное противоречие проявляется и в определении самой «множественности», поскольку при одновременном поступлении противоречивых высказываний попытка зафиксировать сразу два значения «истина» и «ложь» приведет к логическому парадоксу, при котором компьютер (являющийся по своей сути классическим двузначным логическим устройством) должен полностью отказаться от принятия и дальнейшей обработки противоречивой информации; во-вторых, из двух значений (множеств) тетралогики *A* и *M* данное противоречие **позволяет в ряде случаев выделить множественность *M* как доминирующее над неопределенностью *A* состояние**, и в качестве альтернативного выхода из данного противоречия предложить поочередную подстановку значений «1» и «0» (в контексте традиционного бинарного компьютинга) в содержащее эту множественность тетракодовое представление числа.

Такая поочередная подстановка фиксированных «0» (элемент множества *Q*) и «1» (элемент множества *J*) делает возможным приведение множества *M* к виду «плавающего»

(неопределенного) подмножества множества U, попеременно принимая значения подмножеств $M1$ и $M2$. Графическое представление подмножеств $M1$ и $M2$ на множестве U (причем $Q \subset U$, $J \subset U$) приведено на рис. 2. Нетрудно заметить, что данное графическое представление $M1$ и $M2$ по своей структуре напоминает изображение так называемого «Великого предела» – эмблемы китайской классической философии, в которой отображается предельное состояние бытия, высшее начало (начало всех начал) до выделения сил инь – женской (представленной, например, логическим «0») и янь – мужской (представленной, например, логической «1») [7].

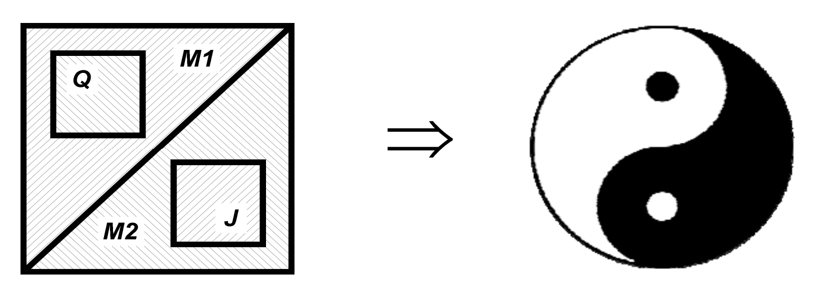


Рисунок 2 – Аналогия представления подмножеств $M1$ и $M2$ с изображением эмблемы «Великого предела»

Подобное «родство» элементов гиперлогики с философской сущностью бытия существенно расширяет применение как соответствующей логики, так и расширенного кодо-логического базиса в целом. Наряду с важностью его применения с целью обеспечения более реалистичного высокопроизводительного компьютерного моделирования сложных систем, становится также возможным создание вычислительных моделей, способных представить в вычисляемом виде большинство противоречий окружающего мира.

Реализация базовых логических операций

Реализация базовых логических операций отрицания «НЕ» («NOT»), логического сложения «ИЛИ» («OR»), логического умножения «И» («AND») на тетралогическом множестве-универсуме U производится также с помощью аксиоматики теории множеств.

Отрицание в логике – унарная (одноместная) операция над высказываниями, результатом которой является высказывание (в известном смысле) «противоположное» исходному. Для обозначения отрицания множества примем следующие обозначения: если φ – элемент множества Ω, являющегося подмножеством универсума U, то отрицание φ – элемент $\overline{\varphi}$ множества $\overline{\Omega}$, при этом справедлива следующая запись:

$$\varphi \in \Omega, \Omega \subset U \;\Rightarrow\; \overline{\varphi} \in \overline{\Omega}, \overline{\Omega} \subset U \;\Rightarrow\; \overline{\varphi} \in \overline{\Omega} \neq \varphi \in \Omega,\;\; \varphi, \overline{\varphi} \in U.$$

Однозначно представимые «ложь» и «истина» по своему определению являются элементами классической двоичной логики, т.е. для множеств $Q = \{0\}$ и $J = \{1\}$ справедливы следующие равенства:

$$\overline{Q} = J, \overline{J} = Q \;\Leftrightarrow\; \overline{0} = 1, \overline{1} = 0.$$

Действительно, для множеств $Q \subset U, J \subset U,$ для которых $Q \cup J = U,$ возможны следующие соотношения:

$$\forall q \in Q, U\; \exists \overline{Q} \left(\overline{Q} = \left\{ \overline{q} : \overline{q} \notin Q \vee \overline{q} \in U \to \overline{q} \in J \right\} \right);$$

$$\forall j \in J, U\; \exists \overline{J} \left(\overline{J} = \left\{ \overline{j} : \overline{j} \notin J \vee \overline{j} \in U \to \overline{j} \in Q \right\} \right).$$

При этом $\bar{Q} \cup \bar{J} = J \cup Q = Q \cup J = U$, в силу коммутативности операции объединения множеств.

Для множества *A*, причем каждый его элемент $a \in (Q \cup J) \Leftrightarrow a \in U$, операция отрицания может быть определена следующим высказыванием:

$$\forall a \in A, U\ \exists \bar{A} \left(\bar{A} = \left\{ \bar{a} : \bar{a} \notin A \vee \bar{a} \in U \to \bar{a} \notin (Q \cup J) \vee \bar{a} \in (\bar{Q} \cup \bar{J}) \to \bar{a} \in A \right\} \right).$$

Это означает, что если $a \in (Q \cup J)$, то $\bar{a} \in (\bar{Q} \cup \bar{J})$, откуда в силу равенства $\bar{Q} \cup \bar{J} = Q \cup J$ получаем, что *a* и $\bar{a}$ принадлежат одному множеству, т.е. $\bar{A} = A$ – верное равенство.

Для определения операции отрицания множества *M* необходимо наличие условия $J \cap Q \neq \varnothing$ (в обход противоречию, возникшему при определении множественности *M*). С учетом наличия условия $J \cap Q \neq \varnothing$ справедливо равенство $(J \cap Q = \bar{Q} \cap \bar{J}) \subset U$. Тогда каждый элемент множества *M* такой, что $m \in (Q \cap J) \Leftrightarrow m \in U$, и операция отрицания для *M* может быть определена следующим высказыванием:

$$\forall m \in M, U\ \exists \bar{M} \left(\bar{M} = \left\{ \bar{m} : \bar{m} \notin M \vee \bar{m} \in U \to \bar{m} \notin (Q \cap J) \vee \bar{m} \in (\bar{Q} \cap \bar{J}) \to \bar{m} \in M \right\} \right).$$

Это означает, что если $m \in (Q \cap J)$, то $\bar{a} \in (\bar{Q} \cap \bar{J})$, откуда в силу равенства $\bar{Q} \cap \bar{J} = Q \cap J$ получаем, что *m* и $\bar{m}$ принадлежат одному множеству. Тогда $\bar{M} = M$ – верное равенство.

При наличии дополнительных условий, подтверждающих доминирование множественности над неопределенностью (в этом случае множественность обозначается с индексом «d» – M_d) в результате операции отрицания M_d происходит также отрицание доминирования, т.е. $\overline{M_d} = M$ и, следовательно, $\bar{M} = M_d$.

Полученные отрицания значений множества $u \in U$ представлены в табл. 1.

В табл. 1 и далее (табл. 2 и 3) индекс «tt» означает, что значение может быть получено в соответствии с обычной таблицей истинности (truth table) двоичной логики, в то время как индекс «st» указывает на то, что для получения данного значения пришлось применять аксиомы теории множеств (set theory).

Таблица 1 – Операция отрицания значений множества $u \in U$

u	**0**	**1**	***A***	***M***	**M$_d$**
$\bar{u}$	1^{tt}	0^{tt}	A^{st}	M_d^{st}	M^{st}

Для любого элемента гиперкодового множества возможна операция двойного отрицания, приводящая к исходному значению элемента:

$$\bar{\bar{0}} = 0,\ \bar{\bar{1}} = 1,\ \bar{\bar{A}} = A,\ \bar{\bar{M}} = M.$$

Логическое сложение (дизъюнкция) – логическая операция по своему применению максимально приближенная к союзу «или» в смысле «или то, или это, или оба сразу». Словосочетание «логическое сложение» может быть равнозначно заменено выражениями «ИЛИ», «логическое ИЛИ», «включающее ИЛИ». Для обозначения операции логического сложения в данной работе используется знак «$\vee$», т.е. $\vee \equiv$ «ИЛИ».

Для обозначения логического сложения элементов тетралогики примем следующие обозначения: если φ_1 – элемент множества Ω_1, а φ_2 – элемент множества Ω_2, причем каждое из множеств Ω_1 и Ω_2 является подмножеством универсума U, то справедлива следующая запись:

$$\varphi_1 \in \Omega_1, \varphi_2 \in \Omega_2,\ \Omega_1, \Omega_2 \subset U \ \Rightarrow\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in (\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset U.$$

При этом для множеств $Q = \{0\}$ и $J = \{1\}$ справедливы следующие равенства:

$$Q \cup Q = Q = \{0\} \text{ и } J \cup J = J = \{1\},$$

с учетом того, что операция объединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$ определена как множество $\Omega =$ $= \{\varphi : \varphi \in \Omega_1 \vee \varphi \in \Omega_2\}$.

В двоичной логике высказывание $\varphi_1 \vee \varphi_2$ истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно высказывание φ_1 или φ_2 истинно. Так, для множеств Q и J операция дизъюнкции определена следующим образом:

$$Q \vee Q = Q = \{0\},\quad Q \vee J = J = \{1\},\quad J \vee J = J = \{1\}.$$

В записи (3) множество A определено как множество, состоящее из элементов множеств Q или J, т.е. $A = \{0; 1\}$. Поэтому для множеств Q, J и A операция дизъюнкции может быть определена следующим образом:

$$A \vee Q = A = \{0, 1\},\quad A \vee J = J = \{1\},\quad A \vee A = A = \{0, 1\}.$$

Последнее равенство – операция дизъюнкции двух множеств A – в силу их представления как неопределенности истины или лжи, отображена в самом множестве A (эквивалентно высказыванию «неопределенность или неопределенность есть неопределенность»).

В записи (4) множество M определено как множество, состоящее из элементов множеств Q и J. Поэтому для множеств Q, J и M операция дизъюнкции может быть определена следующим образом:

$$M \vee Q = M,\quad M \vee J = J = \{1\},\quad M \vee M = M.$$

Последнее равенство – операция дизъюнкции двух множеств M, в силу их представления как многозначности, т.е. одновременности появления истины и лжи, также отображена в самом множестве M (эквивалентно высказыванию «многозначность или многозначность есть многозначность»).

Операция дизъюнкции двух множеств A и M представляет собой нестандартный случай, решение которого основано на противоречии представления множественности. При наличии дополнительных условий, подтверждающих доминирование множественности над неопределенностью (в этом случае множественность обозначается с индексом «d»), возможно отображение результата операции $A \vee M_\text{d}$ на множестве M, то есть $A \vee M_\text{d} = M$. В противном случае, результатом операции $A \vee M$ являются значения множества A, т.е. $A \vee M = A$.

В тетралогике, как в частном случае многозначной логики, операция дизъюнкции может определяться различными способами. Вполне применима схема $\varphi_1 \vee \varphi_2 =$ $= \max(\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, 1, A, M\}$. В иных способах, как правило, стараются сохранить совместимость с булевой алгеброй для значений операндов 0 и 1 [10, с. 19-24]. Однако остается открытым вопрос о распределении значимости (доминирования) состояний A и M.

Полученные значения операции дизъюнкции элементов множества $u \in U$ представлены в табл. 2.

В табл. 2 индекс «d» означает, что такое значение может быть получено в случае установленного доминирования множественности над неопределенностью, т.е. как результат операции $A \vee M_{\mathrm{d}}$ при max(A, M) = M. В этом случае справедливы следующие равенства: $A \vee M_{\mathrm{d}} = M_{\mathrm{d}}$, $A \vee M = A$, а также $M \vee M_{\mathrm{d}} = M_{\mathrm{d}}$, (но $M \vee M = M$ и $M_{\mathrm{d}} \vee M_{\mathrm{d}} = M_{\mathrm{d}}$).

Как и в классической алгебре логики, дизъюнкция в тетралогике может быть бинарной (иметь два операнда), тернарной (иметь три операнда) или n-арной (иметь n операндов). Операция дизъюнкции тетралогики сохранила правила дизъюнкции классической алгебры логики: результат равен 0, если все операнды равны 0; результат равен 1, если хотя бы один из операндов равен 1.

Таблица 2 – Операции дизъюнкции значений множества $u \in U$

$\vee$	**0**	**1**	***A***	***M***	$\boldsymbol{M_{\mathrm{d}}}$
0	0^{tt}	1^{tt}	A^{st}	M^{st}	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$
1	1^{tt}	1^{tt}	1^{st}	1^{st}	1^{st}
A	A^{st}	1^{st}	A^{st}	A^{st}	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$
M	M^{st}	1^{st}	A^{st}	M^{st}	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$
$\boldsymbol{M_{\mathrm{d}}}$	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$	1^{st}	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$	$M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{st}}$

Логическое умножение (конъюнкция) – логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «и». Словосочетание «логическое умножение» может быть равнозначно заменено выражениями «И» или «логическое И». Для обозначения операции логического сложения в данной работе используется знак «$\wedge$», т.е. $\wedge \equiv$ «И».

Для обозначения логического умножения элементов тетралогики примем следующие обозначения: если φ_1 – элемент множества Ω_1, а φ_2 – элемент множества Ω_2, причем каждое из множеств Ω_1 и Ω_2 является подмножеством универсума U, то справедлива следующая запись:

$$\varphi_1 \in \Omega_1, \varphi_2 \in \Omega_2,\ \Omega_1, \Omega_2 \subset U \ \Rightarrow \ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in (\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset U.$$

При этом если для множеств Q = {0} и J = {1} определена операция пересечения, то справедливы следующие равенства:

$$Q \cap Q = Q = \{0\} \text{ и } J \cap J = J = \{1\},$$

с учетом того, что операция объединения $\Omega_1 \cap \Omega_2$ определена как множество $\Omega = \{\varphi : \varphi \in \Omega_1 \wedge \varphi \in \Omega_2\}$.

В двоичной логике высказывание $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ истинно тогда и только тогда, когда хотя оба высказывания φ_1 или φ_2 истинны. Так, для множеств Q и J операция дизъюнкции определена следующим образом:

$$Q \wedge Q = Q = \{0\}, \quad Q \wedge J = Q = \{0\}, \quad J \wedge J = J = \{1\}.$$

Согласно записи (3), множество A определено как множество, состоящее из элементов множеств Q или J, объединенных операцией дизъюнкции. Поэтому для множеств Q, J и A операция конъюнкции может быть определена следующим образом:

$$A \wedge Q = Q = \{0\}, \quad A \wedge J = A = \{0, 1\}, \quad A \wedge A = A = \{0, 1\}.$$

Последнее равенство – операция конъюнкции двух множеств A – отображена в самом множестве A (эквивалентно высказыванию «неопределенность и неопределенность есть неопределенность»).

В записи (4) множество M определено как множество, состоящее из элементов множеств Q и J, связанных между собой операцией конъюнкции. Поэтому для множеств Q, J и M операция конъюнкции может быть определена следующим образом:

$$M \wedge Q = Q = \{0\}, \quad M \wedge J = M, \quad M \wedge M = M.$$

Последнее равенство – операция конъюнкции двух множеств M – также отображена в самом множестве M (эквивалентно высказыванию «многозначность и многозначность есть многозначность»).

В тетралогике, в качестве одного из способов определения операции конъюнкции, может использоваться схема $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \min(\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, 1, A, M\}$, при которой сохраняется совместимость с булевой алгеброй для значений операндов 0 и 1. Поэтому операция конъюнкции двух множеств A и M рассматривается следующим образом: $A \wedge M_\mathrm{d} = A$ или $A \wedge M = M$. Полученные значения операции конъюнкции элементов множества $u \in U$ представлены в табл. 3.

В табл. 3 индекс «d» показывает, что такое значение может быть получено в случае установленного доминирования множественности над неопределенностью, т.е. как результат операции $A \wedge M_\mathrm{d}$ при $\min(A, M) = A$. В этом случае справедливы следующие равенства: $A \wedge M_\mathrm{d} = A$, $A \wedge M = M$, а также $M \wedge M_\mathrm{d} = M$ (но $M \wedge M = M$ и $M_\mathrm{d} \wedge M_\mathrm{d} = M_\mathrm{d}$).

Как и в классической алгебре логики, конъюнкция в тетралогике может быть бинарной (иметь два операнда), тернарной (иметь три операнда) или n-арной (иметь n операндов). Операция конъюнкции тетралогики также сохранила правила конъюнкции классической алгебры логики: результат равен 1, если все операнды равны 1; результат равен 0, если хотя бы один из операндов равен 0.

Таблица 3 – Операции конъюнкции значений множества $u \in U$

$\wedge$	**0**	**1**	***A***	***M***	***M*_d**
0	0^{tt}	0^{tt}	0^{st}	0^{st}	0^{st}
1	0^{tt}	1^{tt}	A^{st}	M^{st}	M_d^{st}
A	0^{st}	A^{st}	A^{st}	M^{st}	A^{st}
M	0^{st}	M^{st}	M^{st}	M^{st}	M^{st}
***M*_d**	0^{st}	M_d^{st}	A^{st}	M^{st}	M_d^{st}

Полученные операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции тетарлогики сохранили в себе все важнейшие равносильности алгебры классической логики. Таким образом, для значений $x, y, z \in \{0, 1, A, M\}$ верны равенства:

$$\overline{\overline{x}} = x; \tag{6}$$

$$x \vee y = y \vee x; \tag{7}$$

$$x \wedge y = y \wedge x; \tag{8}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \tag{9}$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z); \tag{10}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \quad (11)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \quad (12)$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}; \quad (13)$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad (14)$$

$$x \vee x = x; \quad (15)$$

$$x \wedge x = x; \quad (16)$$

$$1 \wedge x = x \ \ (1 \vee x = 1); \quad (17)$$

$$0 \vee x = x \ \ (0 \wedge x = 0). \quad (18)$$

Равенства (8) и (10), (7) и (9) означают коммутативность и ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции соответственно. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции позволяет опускать скобки в дизъюнкциях и конъюнкциях нескольких переменных, коммутативность – расставлять члены таких дизъюнкций и конъюнкций в любом порядке. Равенства (11) и (12) – это дистрибутивные (распределительные) законы дизъюнкции и конъюнкции, которые позволяют преобразовывать выражения так, чтобы операции в них выполнялись в обратном порядке (например, если в исходном выражении вначале выполнялась дизъюнкция, а потом конъюнкция, то можно получить равносильную формулу, в которой вначале выполняется конъюнкция, а потом дизъюнкция). Равенства (13) и (14) (так называемые законы де Моргана) позволяют выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание, а дизъюнкцию – через конъюнкцию и отрицание. Эти же соотношения используются для перенесения отрицаний, применяемых к сложным высказываниям, на составляющие их простые [11, с. 35-36].

В качестве обобщения вышеизложенного «поведения» базовых логических операций тетралогики, можно также предложить ряд операций, которые сведены в табл. 4.

Таблица 4 – Базовые логические операции тетралогики

x	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	***A***	***A***	***A***	***A***	M_d M	M_d M	M_d M	M_d M
y	**0**	**1**	*A*	M_d M	**0**	**1**	*A*	M_d M	**0**	**1**	*A*	M_d M	**0**	**1**	*A*	M_d M
x*⊕*y	0	1	*A*	M M_d	1	0	*A*	M M_d	*A*	*A*	*A*	*A*	M M_d	M M_d	*A*	***M***
x*↓*y	1	0	*A*	M M_d	0	0	0	0	*A*	0	*A*	M A	M M_d	0	M A	M M_d
x*↔*y	1	0	***A***	M_d M	0	1	*A*	M_d M	*A*	*A*	*A*	*A*	M_d M	M_d M	***A***	M_d
x*→*y	1	1	1	0	0	1	***A***	M_d M	*A*	1	*A*	M_d M	M M_d	1	A M_d	M_d
x*←*y	1	0	*A*	M M_d	1	1	*A*	1	1	*A*	*A*	M M_d	1	M_d M	M_d A	M_d
x* | *y	1	1	1	1	1	0	*A*	M M_d	1	*A*	*A*	A M_d	1	M M_d	A M_d	M M_d

В табл. 4 обозначены следующие функции: x⊕y – сумма по модулю 2 (исключающее «ИЛИ», «XOR»); x↓y – отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса – функция «ИЛИ-НЕ»); x ↔ y – эквиваленция; x→y, x←y – импликация (следование); x | y – отрицание конъюнкции (штрих Шеффера – функция «И-НЕ»).

Наличие данных логических операций позволяет получить достаточно полное представление о тетралогическом пространстве и обеспечить практическую реализацию тетралогики в компьютерных системах.

Выводы

Таким образом, рассмотрены основные операции тетралогики как одного из важнейших вариантов постбинарной логики. Показано одно из направлений в формировании математического аппарата постбинарной логики. Выявлено противоречие неявных состояний неопределенности и множественности. Предложен подход, в котором данное противоречие преодолевается путем приведения множественности к доминирующему над неопределенностью состоянию.

В дальнейшем планируются дальнейшие исследования в данном направлении с целью получения новых свойств логических операций алгебры тетралогики и новых тетрафункций. Планируется также аппаратная реализация постбинарной логики на программируемых логических интегральных схемах.

Литература

1. Boole G. The mathematical analysis and logic / Boole G. – Cambridge : Macmillan, Barclay, & Macmillan; London : George Bell, 1847. – S. 82.
2. Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру / Н. Белнап, Т. Стил // Логика вопросов и ответов. – М. : Прогресс, 1981. – 288 с.
3. Аверкин А. Н. Толковый словарь по искусственному интеллекту / Аверкин А.Н., Гаазе-Рапопорт М.Г., Поспелов Д.А. – М. : Радио и связь, 1992. – 256 с.
4. Аноприенко А.Я. Обобщенный кодо-логический базис в вычислительном моделировании и представлении знаний: эволюция идеи и перспективы развития / А.Я. Аноприенко // Научные труды Донецкого национального технического университета. – Донецк : ДонНТУ, 2005. – (Серия «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2005)). – Вып. 93. – С. 289-316.
5. Аноприенко А.Я. Археомоделирование: Модели и инструменты докомпьютерной эпохи / Аноприенко А.Я. – Донецк : УНИТЕХ, 2007. – 317 с.
6. Аноприенко А.Я. Постбинарный компьютинг, Grid и «облачные вычисления»: новые реальности компьютерного моделирования / Аноприенко А.Я., Коноплева А.П., Хасан Аль Абабех // Моделирование и компьютерная графика : материалы третьей Международной научно-технической конференции (7 – 9 октября 2009 г.). – Донецк : ДонНТУ, 2009. – С. 6
7. Аноприенко А.Я. Тетралогика и тетракоды. / А.Я. Аноприенко // Сборник трудов факультета вычислительной техники и информатики». – Донецк, ДонГТУ, 1996. – Вып. 1. – С. 32-43.
8. Колмогоров А.Н. Математическая логика / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – [3-е изд, стереотип.]. – М. : КомКнига, 2006. – 256 с.
9. Великий предел [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Великий_предел.
10. Владимиров Д.А. Булевы алгебры / Владимиров Д.А. – М. : Наука, 1969. – 319 с.
11. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах / Гиндикин С.Г. – М. : Наука, 1972. – 288 с.

Literatura

1. Boole G. Cambridge: Macmillan, Barclay, & Macmillan. London: George Bell. 1847. 82 p.
2. Belnap N. Moscow: Progress. 1981. 288 p.
3. Averkin A.N. Moscow: Radio i svjaz'. 1992. 256 p.
4. Anoprienko A.Ja. Nauchnye trudy Doneckogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta. Seria “Informatika, kibernetika i vychislitel'naja tehnika” (IKVT-2005). Doneck: DonNTU. 2005. Vol.93. P. 289-316
5. Anoprienko A. Doneck: UNITEH. 2007. 317 p.
6. Anoprienko A.Ja. Materialy tret'ej mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii «Modelirovanie i komp'juternaja grafika». October 7-9, 2009. Doneck: DonNTU. 2009. P. 6

7. Anoprienko A. Sbornik trudov fakul'teta vychislitel'noj tehniki i informatiki. №.1. Doneck : DonGTU. 1996. P. 32-43
8. Kolmogorov A. N. Moscow: KomKniga. 2006. 256 p.
9. Available at: http://ru.wikipedia.org/wiki/Великий_предел.
10. Vladimirov D. A. Moscow: Nauka.1969. 319 p.
11. Gindikin S. G. Moscow: Nauka. 1972. 288 p.

А.Я. Анопрієнко, С.В. Іваниця

Особливості реалізації постбінарних логічних операцій

У статті розглянуто представлення постбінарного логічного простору за допомогою аксіоматичного апарату теорії множин. Запропонований спосіб побудови постбінарних логічних операцій, у якому операндами виступають множини, що включають у себе різні комбінації висловлень тетралогіки. Виявлений парадокс представлення множинності й запропонований альтернативний підхід, що припускає роздвоєння множинності, як у її понятійному представленні, так і у виставі її як стану, що домінує над невизначеністю.

A. Anopriyenko, S. Ivanitsa

Main Features of Implementation of Postbinary Logic Operations

The idea of postbinary logical space with the help of axiomatic set theory is described. A method of constructing postbinary logical operations in which operands are the sets that include various combinations of tetralogical expressions. The revealed paradox of representation of the multiplicity and the proposed alternative approach involving a split of multiplicity, both in its conceptual representation, and in presenting it as a state, which dominates over the uncertainty.

Статья поступила в редакцию 29.03.2011.